

Normas Sociais e Comportamento Pró-ambiental em um Jogo Evolucionário de Recursos Comuns*

Resumo

Este estudo desenvolve um jogo evolucionário de recursos comuns para explorar como a interação entre normas sociais, incentivos pecuniários e o comportamento pró-ambiental influencia a autogovernança dos recursos comuns em sistemas socioecológicos. No modelo, indivíduos heterogêneos com racionalidade limitada escolhem entre cooperar ou não cooperar com o nível de extração socialmente ótimo comparando o retorno esperado de cada estratégia com um nível mínimo *satisfatório* de extração, determinado por seus valores morais intrínsecos. Em um ambiente institucional com regras de punição e monitoramento, a distribuição das estratégias na população coevolui endogenamente com a dinâmica do recurso natural. Para valores razoáveis dos parâmetros, equilíbrios múltiplos emergem no longo prazo, caracterizados pela coexistência cíclica de cooperadores e não cooperadores. Nesse contexto, a influência das regras formais e normas sociais sob o comportamento pró-ambiental determina a preservação ou exaustão do recurso comum no longo prazo.

Palavras-chave: comportamento pró-ambiental; jogos evolucionários; gestão de recursos naturais.

Abstract

This study develops an evolutionary game of common-pool resources to explore how the interaction between social norms, monetary incentives, and pro-environmental behavior influences the self-governance of common-pool resources in socio-ecological systems. In the model, heterogeneous individuals with bounded rationality choose whether to cooperate with the socially optimal extraction level or not by comparing the expected return of each strategy with a minimum satisfactory extraction level, which is determined by their intrinsic moral values. Within an institutional environment with punishment and monitoring rules, the distribution of strategies in the population co-evolves endogenously with the dynamics of the natural resource. For reasonable parameter values, multiple equilibria emerge in the long run, characterized by the cyclical coexistence of cooperators and non-cooperators. In this context, the influence of formal rules and social norms on pro-environmental behavior determines the preservation or depletion of the common-pool resource in the long run.

Keywords: pro-environmental behavior; evolutionary games; natural resource management.

JEL Codes: Q32; Q56; D02.

Área da Anpec: Crescimento, Desenvolvimento Econômico e Instituições.

*Agradecemos os comentários detalhados de Gilberto Tadeu Lima endereçados a uma versão anterior deste artigo. Versão preliminar apenas para discussão. Favor não citar.

1 Introdução

Conforme ocorrem avanços na compreensão dos sistemas ambientais e suas interações com os indivíduos, uma crescente conscientização emergiu sobre como o comportamento humano impacta a gestão de recursos naturais. Em especial, uma extensa literatura empírica e experimental explora como normas sociais, entendidas como “regras não escritas” pelas quais nos regemos (BICCHIERI et al., 2023), influenciam o comportamento pró-ambiental que, *inter alia*, determina a autogovernança eficiente dos recursos comuns (OSTROM, 1990; YAMI; VOGL; HAUSERA, 2009; VOLLAN; OSTROM, 2010; RUSTAGI; ENGEL; KOSFELD, 2010; FALK; FEHR; FISCHBACHER, 2001; FARROW; GROLLEAU; IBANEZ, 2017). Este estudo propõe um modelo teórico que formaliza a interação entre uma norma social e o comportamento pró-ambiental no contexto de um jogo de recurso comum (*common pool resource game*).

Na literatura de desenvolvimento econômico e meio ambiente, o comportamento pró-ambiental é definido como uma ação individual voltada para a redução do impacto ambiental, a preservação, ou a recuperação do meio ambiente. Esse comportamento é guiado por uma moral intrínseca, que motiva as pessoas a agir de forma sustentável, mesmo na ausência de benefícios pecuniários privados (MIAO; WEI, 2013). A relevância de elementos comportamentais, éticos e morais na autogovernança eficiente dos recursos comuns tornou-se amplamente reconhecida pela contribuição de Elinor Ostrom (OSTROM, 1990; OSTROM, 2000; OSTROM; GARDNER; WALKER, 1994; POTEETE; OSTROM; JANSSEN, 2010; COX et al., 2009; LAURENT; OSTROM, 2015). Ostrom observou que algumas comunidades conseguiam, de maneira autônoma e descentralizada, desenvolver ao longo do tempo estruturas de cooperação extrafamiliar por meio de um ambiente institucional fundamentado em regras formais e normas sociais bem definidas, capazes de reforçar comportamentos pró-ambientais associado à gestão eficiente dos recursos comuns. Trata-se de uma perspectiva distinta das visões convencionais que sugerem soluções baseadas em uma ampla estrutura de incentivos pecuniários, seja via mercado (SOTO, 2000; ANDERSON; LEAL, 1991), controle governamental (TULLOCK, 1971; ROSE, 1986; YOUNG, 2022), ou ambos (HARDIN, 1968).

De maneira geral, estudos empíricos e experimentais mostram que o que os outros pensam ou fazem em relação ao meio ambiente tem grande influência sobre os indivíduos (FARROW; GROLLEAU; IBANEZ, 2017; VOLLAN; OSTROM, 2010; DIETZ; OSTROM; STERN, 2003; COX et al., 2009; POTEETE; OSTROM; JANSSEN, 2010). Willy e Holm-Müller (2013) investigaram o papel da norma social como um impulsionador para os esforços individuais na conservação do solo em fazendas no Quênia. Enquanto o impacto da norma social na decisão de cooperar é medido por 5 índices de capital social que foram elaborados a partir de entrevistas realizadas na comunidade, a influência do comportamento individual no meio ambiente é medida pelo número de ações que cada um implementou para a proteção do solo. Os resultados indicaram que a participação em ações coletivas, que envolveram 49% dos membros dessa comunidade, foi significativamente influenciada pelos componentes sociais, decompostos em 5 índices (participação social, conexão social, apoio social, reciprocidade e confiabilidade). Bluffstone et al. (2020) testam uma direção de causalidade contrária, avaliando se indivíduos cooperativos — que adotam um comportamento pró-ambiental — impulsionam normas sociais para ação coletiva em favor da floresta. A adesão às normas foi avaliada por meio do cumprimento de controle e normas de acesso, envolvimento no monitoramento e participação nas reuniões de governança. Os membros de comunidades no Nepal foram testados tanto em um experimento controlado quanto no uso da floresta, indicando uma uniformidade em suas escolhas de cooperação. Esse resultado indica a estabilidade do comportamento pró-ambiental, bem como o seu papel na tomada de decisão em diferentes contextos. Os autores ainda verificaram a hipótese de que tais ações são realmente significativas para a melhora na qualidade da floresta. A avaliação econométrica apresentou uma relação positiva e significativa entre as ações coletivas e a renovação da floresta. Uma correlação semelhante foi encontrada em Mosler (1993) para um jogo de extração de peixes, o qual ainda

identificou que um compromisso público com o grupo contribui para aqueles cuja consciência ambiental era baixa desenvolvessem um comportamento mais cooperativo.

Apesar da relevância das normas sociais e do comportamento pró-ambiental para a autogovernança eficiente ser amplamente documentada na literatura empírica e experimental, carecem estudos teórico-formais que integram esses elementos em uma estrutura analítica amplamente aceita e revisada (OSTROM, 2000). Este estudo contribui nessa direção. Estendemos um jogo clássico de recursos comuns (DASGUPTA; HEAL, 1980; OSTROM; WALKER; GARDNER, 1992; OSTROM; GARDNER; WALKER, 1994) para integrar, em um de seus vários aspectos relevantes, a influência das normas sociais e do comportamento pró-ambiental para a autogovernança de um sistema socioecológico.

No modelo, baseado em evidências empíricas (BUNTAINE; ZHANG; HUNNICUTT, 2021; EISENBARTH; GRAHAM; RIGTERINK, 2021; CARPIO; ALPIZAR; FERRARO, 2021), supomos que uma comunidade que compartilha o acesso a um recurso comum elege membros para um comitê responsável pelo monitoramento das atividades de extração. Para remunerar os monitores, que deixam suas atividades de extração e passam a inspecionar o comportamento dos demais membros, a comunidade institui uma contribuição individual *per capita*. Cabe aos monitores verificar se os indivíduos estão extraindo unidades de recurso natural conforme o nível socialmente ótimo (cooperando), ou se eles estão se apropriando de unidades além do determinado pela comunidade (não cooperando). Também baseado em evidências empíricas, supomos que a comunidade consegue identificar o nível ótimo de extração, ou seja, aquele que evita o esgotamento do recurso natural (ACHESON, 1988; OSTROM, 1990; VOLLAN; OSTROM, 2010). Sempre que um membro da comunidade é identificado pelos monitores extraindo acima do limite, ele é multado. O valor arrecadado com as multas é transferido integralmente para a recuperação do recurso natural.

O ambiente institucional do modelo é complementado por uma dinâmica evolucionária do tipo *satisficing* que modela o comportamento pró-ambiental na estrutura de decisão dos indivíduos. Supomos que cada indivíduo compara o diferencial de benefício econômico entre extrair, ou não, acima do socialmente ótimo com um valor mínimo satisfatório de sua própria norma pessoal com relação ao uso do recurso comum. Esse limiar que determina se vale a pena descumprir as regras estabelecidas pela comunidade é determinado individualmente pelas características morais dos membros dessa comunidade, ou seja, o comportamento pró-ambiental. Os indivíduos, portanto, comparam aspectos econômicos associados a cada estratégia com seus próprios valores intrínsecos para definir se devem revisar a estratégia atual, permitindo que pessoas que enfrentam os mesmos custos e benefícios possam escolher estratégias diferentes com base em um comportamento pró-ambiental. Em virtude dessa dinâmica, nos referimos a essa nova extensão como *um jogo evolucionário de recursos comuns*.

Essa microdiversidade presente no ambiente institucional do modelo cria um relacionamento endógeno de longo prazo entre a distribuição das estratégias de cooperação e não cooperação e a dinâmica do recurso natural. Para valores razoáveis dos parâmetros, essa coevolução resulta em três configurações possíveis de longo prazo. Caso o benefício marginal da extração seja relativamente mais elevado que os custos pecuniários nos payoffs, o sistema evolui ciclicamente ao longo do tempo. Em contrapartida, se os custos relativos à multa forem suficientemente altos, a dinâmica é caracterizada por um ponto de sela. A terceira alternativa também inclui um equilíbrio instável de ponto de sela, o qual acontece quando o benefício adicional da não cooperação é superior ao valor da punição. Em relação à literatura, esses resultados oferecem uma análise mais completa da dinâmica de uso de recursos naturais, permitindo uma compreensão de como as normas sociais e o comportamento pró-ambiental interferem no uso de recursos pela comunidade.

Além desta introdução, o trabalho está estruturado com a apresentação do modelo formal na seção dois, a apresentação da dinâmica evolucionária *satisficing* na seção três, a análise de estabilidade na seção quatro, finalizando com as principais conclusões da pesquisa.

2 Estrutura do modelo

Com o intuito de identificar como uma comunidade faz a gestão de um bem comum e de que maneira suas motivações e tendências afetam as escolhas dos agentes em períodos finitos, utilizamos o modelo estático dos comuns como um jogo de n participantes (DASGUPTA; HEAL, 1980), que também foi utilizado como referência para as pesquisas experimentais (OSTROM; WALKER; GARDNER, 1992; OSTROM; GARDNER; WALKER, 1994). Seguindo a mesma nomenclatura proposta e mantida por Ostrom (1994; 2000) em toda sua pesquisa, nos referimos a essa estrutura como um jogo de *Common Pool Resource*, CPR. Nele, um número fixo de n indivíduos têm direito de acesso e extração de um determinado recurso natural que está disponível para o uso comum e gera benefícios para os indivíduos, tanto em termos de insumos e serviços para o processo produtivo, quanto pela possibilidade de contemplação. O esforço empregado na extração de recursos por cada indivíduo i , em tempo contínuo, é dado por $x_{i,t}$, medido na forma de unidades de *Common Pool Resource* (OSTROM; GARDNER; WALKER, 1994).¹ A soma dos fluxos de esforços individuais agregados é dado por:

$$X_t = \sum_{i=1}^n x_{i,t}. \quad (1)$$

O estoque total de recurso natural disponível em dado instante do tempo é representado por S_t , enquanto a extração desse recurso por unidade de tempo é dada por uma função, $H(X_t, S_t)$ que combina o fluxo de esforço agregado com o estoque de recursos existentes. A extração de recursos por cada unidade de tempo, H_t , é uma função crescente em seus dois argumentos, logo, $H_X > 0$ e $H_S > 0$.² Para um determinado estoque, a extração adicional gerada por uma unidade extra de esforço deve diminuir conforme o total de esforço aumenta, $H_{XX} < 0$. Ademais, quanto maior o nível do estoque do recurso natural disponível, maior será o aumento marginal na extração agregada a cada unidade extra de esforço, $H_{XS} > 0$. Tais suposições são válidas para todo $X_t \geq 0$ e $S_t \geq 0$. Como é necessário que haja esforço e recurso natural para que a extração aconteça, também supõe-se que essas variáveis são complementares, $H(0, S) = H(X, 0) = 0$.

Como no curto prazo o estoque do recurso natural está dado, S_0 , a função de extração do recurso natural agora pode ser aproximada de uma função côncava e crescente que utiliza o esforço como insumo, $f(X_t) = H_t(X_t, S_0)$. Para extrair o recurso natural e utilizá-lo, é necessário que o indivíduo exerça esforço. Mesmo que a extração traga benefícios, os indivíduos ainda se defrontam com um custo de oportunidade, tendo em vista que eles poderiam usar o tempo destinado a essa tarefa para o lazer ou qualquer outra atividade. O custo de oportunidade de imprimir esforço nas atividades de extração é representado por $\delta \in \mathbb{R}_+$ para cada unidade de esforço individual $x_{i,t}$, sendo um valor constante e exógeno. Dadas as características dessas funções, o valor da extração agregada, $f(X_t)$, excede o custo total de esforço da comunidade, δX_t , até um determinado nível de esforço total, X_0 , e deve cair a partir desse ponto. Consequentemente, a função de extração deve cruzar a linha δX_t em X_0 no plano $(f(X_t), X_t)$. Assim, o benefício líquido obtido pelo indivíduo i referente a extração total de recursos é proporcional a sua parcela de esforço em relação ao grupo, de modo que o *payoff* do indivíduo i pode ser descrito como:

$$\pi_{i,t}(x_{1,t}, \dots, x_{n,t}) = \frac{x_{i,t}}{\sum x_{i,t}} f(X_t) - \delta x_{i,t}, \quad (2)$$

fazendo com que o *payoff* de toda comunidade seja expresso como:

$$P(x_{1,t}, \dots, x_{n,t}) = \sum \pi_{i,t} = f(X_t) - \delta X_t. \quad (3)$$

¹ A medida em termos de unidade de CPR permite padronizar os custos e benefícios dos indivíduos durante o uso do recurso comum. Segundo Ostrom, Gardner e Walker (1994) as unidades de recursos podem incluir acre-pés de água, toneladas de peixes, barris de petróleo, entre outros.

² Os termos H_X e H_S indicam as derivadas parciais de primeira ordem, enquanto H_{XX} representa a derivada parcial de segunda ordem e H_{XS} indica uma derivada parcial cruzada.

Uma referência para o nível de esforço agregado eficiente, $X_{e,t}$ é aquele capaz de maximizar o *payoff* de toda comunidade, fazendo como que o produto marginal do esforço seja igual ao custo de oportunidade dessa ação, $f'(X_{e,t}) = \delta$. Devido à concavidade da função $f(X_t)$, sabe-se que $X_{e,t}$ é único. A fim de medir a relação extração-esforço, é possível reescrever a função de *payoff* em termos do produto médio do esforço, dado por $A(X_t) = \frac{f(X_t)}{X_t}$. A concavidade de $f(X)$ também garante que essa relação é decrescente, ou seja, quanto mais esforço é aplicado a extração, o total de extração por unidade de trabalho cai. O *payoff* do indivíduo i agora pode ser escrito:

$$\pi_{i,t}(x_{i,t}, X_t) = x_{i,t}[A(X_t) - \delta]. \quad (4)$$

Considerando que o recurso natural é caracterizado pelo acesso aberto e o número de usuários possa se expandir, então o grau de esforço aplicado será grande o suficiente para igualar o custo de oportunidade. Apesar desse ponto caracterizar uma escolha racional do ponto de vista individual, ele é ineficiente, pois envolve um grau de esforço, e extração, superior ao que seria ótimo para a comunidade, gerando um caso de superexploração. No nível eficiente para a comunidade, (X_e), o esforço é dado até o ponto em que o resultado adicional, $A(X_t) - \delta$, de uma unidade extra de esforço é compensada pela perda proveniente da queda no produto médio do esforço, dado por $X_{e,t}A'(X_{e,t})$. Contudo, do ponto de vista individual, a extração extra dada por uma unidade adicional de esforço permanece a mesma, mas a perda do produto médio, $\frac{X_{e,t}A'(X_{e,t})}{n}$, é compartilhada por todos os membros da comunidade. Isso faz com que os indivíduos escolham um nível de esforço acima do que é eficiente. Essa condição representa o problema clássico dos comuns, em que o que é bom em um nível individual nem sempre é eficiente do ponto de vista da comunidade. A prova desse equilíbrio simétrico com superexploração é feita em [Dasgupta e Heal \(1980\)](#). Esse jogo também resulta em um equilíbrio de Nash único com $x_{i,t} = x_{N,t}$ para todos os jogadores i , envolvendo a superexploração, $X_{e,t} < X_{N,t}$, que é provado em [Sethi e Somanathan \(1996\)](#).

Como diversos modelos teóricos e evidências dos experimentos de campo demonstram, o equilíbrio cooperativo nem sempre acontece. Entretanto, nos casos em que a cooperação é sustentada, alguns atributos comportamentais são observados com frequência. Com o objetivo de avaliar como o comportamento pró-ambiental pode afetar a decisão de cooperação na gestão de bens comuns, é necessário modificar o jogo de CPR para incluir alguns recursos identificados no trabalho empírico de Elinor Ostrom.

Uma maneira de gerir a extração de recursos naturais nas comunidades é por meio da formação de comitês de monitoramento. Eles são responsáveis por acompanhar a atividade produtiva e garantir a manutenção do recurso utilizado por todos, seja ele uma floresta, um rio ou um trecho da costa oceânica ([OSTROM, 1990](#)). Essa iniciativa exige que alguns membros do grupo, eleitos e legitimados pela comunidade, deixem suas atividades como membros extratores e se dediquem exclusivamente ao monitoramento. Em [Ostrom \(2000\)](#), são citados dois principais mecanismos para a organização do comitê de monitoramento: um envolvendo a implementação de vagas rotativas para que todos tenham a chance de participar e outro com a contratação de monitores custeada pela contribuição da comunidade. Com o objetivo de analisar o impacto do monitoramento nas decisões desses indivíduos, escolhemos modelar o comportamento usando o segundo mecanismo. Isso é necessário, pois no caso do primeiro, mesmo os indivíduos menos alinhados aos objetivos de preservação teriam acesso ao cargo de monitor, podendo gerar um dilema de segunda ordem.³ Existe um número fixo de K monitores nessa comunidade, com $K < n$. Supõe-se que eles são membros engajados com a preservação dos recursos naturais e não são corrompidos pelos membros que não estão seguindo as regras estabelecidas pela comunidade, pois eles possuem reconhecidamente um forte compromisso moral com suas responsabilidades junto a comunidade ([CRAWFORD; OSTROM, 1995](#)).⁴

³ Para mais detalhes sobre dilemas de segunda ordem em CPR, ver [Ostrom \(2000\)](#).

⁴ Uma alternativa de extensão desse estudo seria incorporar a possibilidade de corrupção dos monitores para avaliar como isso poderia impactar a dinâmica de cooperação na comunidade.

Para custear a remuneração desses indivíduos, dada por um valor fixo, w , a comunidade define uma remuneração $\tau[\pi_{i,t}(x_{i,t}, X_t)]$. Com $0 < \tau < 1$, uma parcela do total extraído por cada membro da comunidade é destinado ao monitoramento e preservação do CPR, a qual supõe-se que os monitores usam todo o recurso recebido para financiar o monitoramento e o consumo de subsistência. Os monitores são responsáveis por fiscalizar as áreas de uso comum e a atividade de extração dos membros da comunidade. As informações coletadas pelos monitores são repassadas para toda a comunidade, que executará a punição daqueles que extraíram além dos limites estabelecidos e foram identificados. Ao compreender os limites de extração que preservam o ritmo de renovação natural, a comunidade pode restringir a extração dos recursos para um nível $x_{e,t}$, transformando-o em um ponto de referência para os monitores. Os indivíduos dessa comunidade podem seguir o limite de extração ou violar essa regra e imprimir um nível de esforço em extração acima do valor de equilíbrio. Dado que o valor de $x_{e,t}$ foi estabelecido com base nas observações de toda comunidade e não de maneira arbitrária, qualquer um que seja identificado pelo monitoramento ao ultrapassar o limite da sua dotação será punido pelo grupo, e todos têm conhecimento dessa condição.

Considere que existe um número fixo de n indivíduos que compartilham do direito de acesso e extração de um determinado recurso natural. Ademais, ao invés de um *continuum* de possíveis níveis de esforço em extração, considere apenas duas possibilidades, x_c e x_{nc} , que denotam o grau de esforço de indivíduos preocupados com a manutenção do bem e que contribuem integralmente com o valor estabelecido pelo comitê (chamados de cooperadores), e os que não seguem a determinação estabelecida e empregam um nível de extração acima do nível escolhido (não cooperadores), impondo uma externalidade ambiental negativa para a comunidade. Essa relação satisfaz $x_e \leq x_c < x_{nc} \leq x_N$, indicando que o grau de esforço escolhido pelos membros da comunidade varia em um intervalo entre o equilíbrio socialmente ótimo e o equilíbrio de Nash. Tal condição resulta na escolha de um nível de esforço próximo ou igual ao ótimo social por parte dos cooperadores, enquanto os não cooperadores imprimem um nível de esforço mais alto, embora ele seja limitado pelo valor estabelecido no equilíbrio de Nash. Os membros não imprimem menos esforço do que o socialmente ótimo, dado que não há benefício pessoal ou social para essa escolha, logo $x_i \geq x_e$.

A extração de recursos, bem como o monitoramento e a sanção, ocorrem continuamente ao longo do tempo, com cada indivíduo adotando exatamente uma das duas estratégias puras. Seja, $\lambda_t \subset (0, 1) \in \mathbb{R}$ e $1 - \lambda_t$ a proporção de indivíduos que são não cooperadores e cooperadores, respectivamente.⁵ Em cada período, os membros da comunidade se encontram aleatoriamente, de maneira que a probabilidade de encontrar um não cooperador é dada por λ_t , enquanto a probabilidade de encontrar um cooperador é de $1 - \lambda_t$. Como há apenas dois níveis de extração que podem ser escolhidos, a extração agregada dos recursos pode ser definida como a soma do total de extração de cada subpopulação (cooperadores e não cooperadores):

$$X_t = X_{nc,t} + X_{c,t}, \quad (5)$$

que também pode ser expresso por meio da proporção de agentes:⁶

$$X_t = [x_{nc}\lambda_t + x_c(1 - \lambda_t)]. \quad (6)$$

Considere que todos os membros da comunidade devem realizar uma contribuição para o comitê de monitoramento a fim de custear suas atividades. Essa contribuição incide sobre o total obtido pela extração,

⁵ Como n é finito e apenas estratégias puras são jogadas, os valores admissíveis de λ_t serão discretos. Abstraímos isso e permitimos que as parcelas da população assumam quaisquer valores não negativos cuja soma seja a unidade. Na maioria dos bens comuns locais, n varia de algumas dezenas a algumas centenas.

⁶ Podemos alcançar esse mesmo resultado ao considerar que existe um *continuum* de indivíduos normalizados para 1, de modo que a extração agregada das subpopulações é dada por $X_{nc,t} = \int_0^{\lambda_t} x_{nc} n dz = x_{nc} n \lambda_t$ e $X_{c,t} = \int_{\lambda_t}^1 x_c n dz = x_c n (1 - \lambda_t)$, que ao substituir em (5) e, considerando que a população é normalizada para 1, o total de extração realizada pela comunidade é a soma das integrais, gerando a expressão apresentada em (6).

dado por (4). Os membros dispostos a cumprir os limites de extração adotam um comportamento cumpridor, limitando sua extração para os níveis determinados, x_c . Utilizando (4), o *payoff* do cooperador, identificado pelo subscrito c , é expresso da seguinte forma:

$$\pi_{c,t} = (1 - \tau)x_c[A(X_t) - \delta], \quad (7)$$

em que $\tau \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ representa o percentual de contribuição dado exogenamente.

No entanto, um membro dessa comunidade pode optar por não cumprir as regras impostas sobre a extração. Os indivíduos que estão dispostos a adotar um comportamento inconformista com os limites estabelecidos são definidos como os membros não cooperadores. Para ocultar sua extração da comunidade, esses indivíduos subnotificam seu nível de esforço, pagando uma contribuição menos do que proporcional ao seu nível de extração. O seu benefício líquido de extração pode ser expresso como:

$$(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta], \quad (8)$$

em que $\alpha \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ é a fração de extração do não cooperador que foi reportada para determinar sua contribuição. Como o intuito desse indivíduo é manter seus níveis de extração ocultos, ele contribui de maneira igual aos cooperadores, mesmo que a parcela extraída do recurso natural seja maior, portanto, $\alpha = \frac{x_c}{x_{nc}}$.

Cabe aos monitores o trabalho de identificar aqueles que estão descumprindo os limites de extração para que os cooperadores possam executar a punição. Segundo Ostrom (2000), juntos, os responsáveis pelo monitoramento e pela punição, criam uma abertura mais robusta para a ação coletiva e um mecanismo para ajudá-la a crescer. A probabilidade de qualquer membro da comunidade ser monitorado é dada por ε , enquanto a chance de não ser monitorado é de $1 - \varepsilon$, com $\varepsilon \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Os indivíduos não cooperadores, portanto, enfrentam uma loteria na qual eles são identificados pelos monitores e pagarem a multa, ou não são identificados pelos monitores e permanecem com o resultado da extração acima do limite imposto pela comunidade. Um não cooperador, portanto, enfrenta uma probabilidade de $\varepsilon(1 - \lambda)$ de ser identificado pelo monitor e sancionado pela comunidade, e uma probabilidade de $1 - \varepsilon(1 - \lambda)$ do contrário.⁷ Se ocorrer a primeira situação, aqueles que foram identificados pelo monitoramento pagam uma multa, $\sigma \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$, exogenamente determinada, referente ao rendimento total obtido pelo indivíduo, π_{nc} .⁸ O valor da multa pode ser expresso como:

$$\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]. \quad (9)$$

O *payoff* esperado do não cooperador quando ele é sancionado pode ser descrito ao descontar o valor da multa dado em (9) do seu benefício líquido de extração em (8):

$$\varepsilon(1 - \lambda)[(1 - \sigma)(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]]. \quad (10)$$

Note que cada cooperador recebe um valor de $\varepsilon\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]$ referente ao valor da multa dos não cooperadores. Ao invés de utilizar esse montante para agregar em seu consumo, os cooperadores investem o valor arrecadado na renovação do recurso natural, gerando um incremento no estoque de recursos naturais equivalente a $(1 - \lambda_t)\varepsilon\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]$. Entretanto, o não cooperador também pode passar despercebido pelo monitoramento e sanção. Nesse caso, o não cooperador permanece com o benefício líquido de extração dado em (8), apresentando o seguinte *payoff* esperado:

$$[1 - \varepsilon(1 - \lambda_t)](1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]. \quad (11)$$

⁷ Para que a punição seja implementada é necessário que exista capacidade de *enforcement* para realizar a punição por meio da ação dos cooperadores.

⁸ Assumimos que σ é igual para todos os membros da comunidade.

Somando as expressões (10) e (11) temos o *payoff* esperado do não cooperador, identificado pelo subscrito nc , que pode ser definido como:

$$\pi_{nc,t} = [1 - \varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma][(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]]. \quad (12)$$

Considerando tais condições no jogo de *Common Pool Resource* com contribuição, monitoramento e punição, o *payoff* do indivíduo i pode ser descrito como:

$$\pi_{j,t} = \begin{cases} \pi_{nc,t} = [1 - \varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma][(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]], & \text{se } j = nc; \\ \pi_{c,t} = (1 - \tau)x_c[A(X_t) - \delta], & \text{se } j = c. \end{cases} \quad (13)$$

Como a comunidade conhece apenas o total extraído, mas não a quantia que cada um extraiu, é possível que alguns indivíduos fiquem tentados a imprimir um nível de esforço superior ao estabelecido, chegando, no limite, à quantidade referente ao Equilíbrio de Nash. Esse comportamento pode comprometer a disponibilidade de recursos, mas não proporciona um maior nível de contribuição, pois a extração é subdeclarada. Para remunerar os monitores de maneira justa, dado que eles deixaram a atividade de pesca para realizar o monitoramento, considere que o valor recebido é mais que proporcional ao *payoff* dos membros cooperadores, ou seja, $w > \pi_{c,t}$. Embora a remuneração do trabalho de fiscal ofereça um *payoff* superior, apenas os indivíduos eleitos pela comunidade podem ocupar essa posição, tendo em vista que eles apresentam um comportamento pró-ambiental reconhecido pelos demais membros.

3 Recursos naturais e a dinâmica evolucionária *satisficing*

No curto prazo as frações de cooperadores e não cooperadores estão dadas, assim como o estoque do recurso natural. Entretanto, no longo prazo, a gestão dos recursos naturais move-se impulsionada por mudanças na distribuição de frequências das estratégias na população de membros da comunidade, $(\lambda_t, 1 - \lambda_t)$ e pela disponibilidade de recursos naturais, S_t . Dado que existe um relacionamento endógeno entre a comunidade e os recursos naturais, a maneira como as frações de indivíduos varia ao longo do tempo afeta a disponibilidade de recursos comuns e vice-versa. Para explorar a relação entre as estratégias adotadas pelos membros da comunidade e como isso afeta a gestão de recursos naturais, podemos utilizar uma modelagem do estoque de recursos naturais semelhante a apresentada em [Brander e Taylor \(1998\)](#).

O estoque do recurso natural a cada momento t é S_t . Para essa variável, é conveniente pensar no estoque de recursos como uma representação geral desse complexo que envolve fauna e flora, desde que tenha a propriedade de não excludente, porém rival. A taxa de variação do estoque de recurso natural no tempo, $\frac{dS_t}{dt} \equiv \dot{S}_t$, é estabelecida como a diferença entre a taxa de crescimento natural, $G(S_t)$, e a taxa de extração desse recurso, H_t :

$$\dot{S}_t = G(S_t) - H_t. \quad (14)$$

Além da dependência da função de extração, a evolução do estoque do recurso natural depende da sua própria taxa natural de reposição, apresentada pela função diferenciável $G(S)$. Existe uma capacidade limite para a regeneração do recurso natural, dada por S_k , de modo que $G(S) < 0$ para qualquer $S > S_k$ e $G(S_k) = 0$. Considere, S_m o estoque mínimo viável, de modo que $G(S) > 0$ para $S_m < S < S_k$. Tal valor determina qual o limite em que o recurso não poderá mais se recuperar por meio do crescimento natural, mesmo na ausência de qualquer extração.

A taxa de crescimento natural, $G(S_t)$, pode ser definida por uma função logística, sendo essa uma forma funcional simples para representar o crescimento biológico de um ambiente, como segue:

$$G(S_t) = rS_t \left(1 - \frac{S_t}{S_k}\right), \quad (15)$$

em que r é a taxa de crescimento intrínseca do recurso natural e S_k representa a capacidade limite de regeneração desse recurso, pois quando $S_t = S_k$ não há crescimento adicional do estoque. Além da capacidade de renovação natural que esse recurso dispõe, também há um impacto positivo nesse estoque por meio das ações de restauração e preservação que a comunidade realiza. Tais ações são viabilizadas pela arrecadação de recursos da comunidade mediante a cobrança de multas dos indivíduos que foram identificados como não cooperadores. As atividades de restauração realizadas pela comunidade afetam o estoque de recursos naturais de maneira positiva por meio do montante arrecadado com as multas, $(1 - \lambda_t)\varepsilon\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]$. Adicionando esse termo, medido de unidades de CPR, a taxa natural de reposição, temos:

$$G(S_t) = rS_t \left(1 - \frac{S_t}{S_k}\right) + (1 - \lambda_t)\varepsilon\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[A(X_t) - \delta]. \quad (16)$$

Assumimos que a extração, $H(S_t, X_t)$, é uma função do tamanho do estoque de recurso natural disponível e da quantidade do esforço agregado dessa comunidade, conforme a função de produção de [Schaefer \(1957\)](#), estendida para o contexto de heterogeneidade de estratégias de exploração. Logo, pode ser definida como:

$$H(S_t, \lambda_t) = \theta S_t X_t = \theta S_t [x_{nc}\lambda_t + x_c(1 - \lambda_t)], \quad (17)$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ representa uma constante de proporcionalidade da função. Logo, substituindo (16) e (17) em (14), temos:

$$\dot{S}_t = S_t \left[r \left(1 - \frac{S_t}{S_k}\right) - \theta(x_{nc}\lambda_t + x_c(1 - \lambda_t)) \right] + (1 - \lambda_t)\varepsilon\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S_t - \delta]. \quad (18)$$

Utilizamos as contribuições de [Simon \(1997\)](#) para descrever a dinâmica de imitação evolucionária do tipo *satisficing* do modelo, produzindo a lei de movimento da proporção dos indivíduos com estratégia de não cooperação, λ_t . Essa estrutura envolve um processo de aprendizado social por trás da dinâmica evolucionária, em que cada agente aprende por meio da comparação de seu *payoff* com os demais. A modelagem do tipo *satisficing*, conforme apresentada por [Simon \(1997\)](#), demonstra que em situações em que é impossível otimizar ou que o custo de fazê-lo é excessivamente oneroso, o indivíduo pode buscar uma alternativa satisfatória ou invés de tentar encontrar uma opção ótima.

Podemos agora descrever a dinâmica evolucionária que produz a lei de movimento da distribuição de frequência das estratégias de cooperação entre os indivíduos. Com base em [Vega-Redondo \(1996\)](#) e [Simon \(1955\)](#), supomos que o comportamento de escolha satisfatória seja um gatilho que transforma um indivíduo em um potencial revisor de estratégia.⁹ Uma dinâmica semelhante a apresentada foi utilizada em um contexto de sonegação fiscal para a análise da relação entre a corrupção persistente e crescimento econômico em [Torres \(2020\)](#). Num certo momento, um indivíduo i obtém o benefício econômico líquido associado a estratégia de não cooperação, medido pelo diferencial de *payoffs* representado por $\pi_{nc} - \pi_c$, e que pode ser positivo, negativo ou igual a zero. O indivíduo i compara então esse diferencial de *payoffs* com o valor mínimo satisfatório $\rho_i \in \mathbb{R}$ igual ou superior ao qual considera tentadora, por motivos econômicos, a possibilidade de não cumprir com os limites estabelecidos pela comunidade em relação ao nível de extração.

Além de tratar de fatores econômicos, como a parcela de contribuição para o monitoramento do bem comum e a punição esperada para aqueles que ultrapassam os limites de extração, a dinâmica evolutiva do tipo *satisficing* é adequada para incorporar um elemento não econômico que afeta as decisões desses indivíduos, para a qual existem evidências empíricas relevantes: o comportamento pró-ambiental. Esse

⁹ A dinâmica evolucionária do tipo *satisficing* tem sido utilizada com sucesso também em outros contextos, ver [Silveira e Lima \(2022\)](#), [Martins, Silveira e Lima \(2021\)](#), [da Silveira e Lima \(2021\)](#).

recurso teórico permite também tratar a microdinâmica da distribuição de frequências das estratégias de cooperação na comunidade como um fenômeno que pode ser afetado pelo comportamento pró-ambiental dos indivíduos. Neste estudo, o comportamento pró-ambiental pode ser definido como um conjunto de motivações comportamentais intrínsecas e que não carecem de qualquer mecanismo de incentivo adicional [Vázquez \(2007\)](#). Os aspectos particulares de cada indivíduo, capazes de impactar seu comportamento pró-ambiental, também foram explorados na pesquisa de [Sen \(1987\)](#). Segundo ele, as considerações éticas sugerem que a maximização do bem estar de um indivíduo vai além do próprio consumo, incluindo uma base mais ampla de elementos e permitindo que aspectos morais interfiram no seu processo decisório. *Mutatis mutandis*, essa complexa cadeia de motivações morais e pecuniárias é central para a emergência da autogovernança eficiente dos recursos comuns ([OSTROM, 1990](#); [COX et al., 2009](#)).

Avaliando o comportamento dos indivíduos de forma mais abrangente, há evidências consideráveis de que a decisão de uma pessoa relativa ao cumprimento de suas obrigações junto a comunidade vai além de um simples cálculo de custo-benefício baseado exclusivamente em motivos e considerações econômicas estritamente definidas. Toda a pesquisa de Elinor Ostrom dedicou-se a demonstrar que existiam arranjos compostos por regras, valores e moral, capazes de sustentar a cooperação na contramão de uma estrutura de decisão autocentrada. O comportamento pró-ambiental é tratado aqui como um termo capaz de compreender uma ampla gama de motivações e tendências que afetam a decisão de cooperar, que não estão diretamente associadas a um raciocínio econômico estrito ao ganho de unidades de recurso natural, sendo ele idiossincraticamente subjetivo e/ou socialmente determinado.

Como essas motivações no que diz respeito ao cumprimento dos níveis de extração são idiossincráticas, e, conseqüentemente, heterogêneas entre os indivíduos, é razoável assumir que são definidas de forma aleatória e independente entre os membros da comunidade ao longo do tempo. Inicialmente, um membro da comunidade pode lidar com motivações ambivalentes e tendências inclinadas à cooperação, bem como motivações que tendem para a não cooperação.

Consideramos de maneira plausível que um membro dessa comunidade pode ter sentimentos morais conflitantes no que diz respeito ao cumprimento ou não dos limites de extração. Portanto, apenas na hora de tomar sua decisão ele optará por um comportamento inclinado à cooperação ou ao descumprimento dos limites determinados. Dado que os limites de extração são determinados por todos os membros da comunidade, o indivíduo não pode questionar o limite imposto, mas ele pode, no entanto, considerar suas motivações não econômicas e tendências para o descumprimento como justas. Essa abordagem ao comportamento de cooperação permite tratar os membros da comunidade como heterogêneos em duas dimensões com relação ao comportamento pró-ambiental, que são se um indivíduo tem um comportamento ambiental inclinado a cooperação ou não, e o quanto esse atributo de um membro da comunidade é favorável a cooperar com os limites de extração.

Podem existir indivíduos em que suas motivações e tendências inclinadas à cooperação e a não cooperação se compensam, levando a uma condição de chamamos de comportamento ambiental neutro. Esse tipo de indivíduo foi classificado em [Ostrom \(2000\)](#) como egoístas racionais. Como resultado, essas pessoas devem avaliar apenas o benefício econômico esperado associado a cada uma das estratégias. Podemos ainda diferenciar um aprofundamento (margem intensiva) de uma expansão (margem extensiva), para qualquer tipo de comportamento ambiental global — tanto de um comportamento ambiental favorável à cooperação quanto de um comportamento referente a não cooperação. Suponha que o comportamento ambiental geral entre os membros da comunidade seja favorável à cooperação. Dada a proporção de cada tipo de comportamento ambiental (inclinado ou não para a cooperação) na população dessa comunidade, um aumento no grau médio de tendência para a cooperação nessa população aumenta, portanto, o comportamento pró-ambiental ao longo da margem intensiva. Considere agora que o comportamento ambiental na mesma população é inclinado a não cooperação. Dado o comportamento ambiental líquido de cada membro da comunidade, um

aumento na frequência de extratores para os quais o comportamento ambiental líquido é favorável a não cooperação aumenta o comportamento ambiental geral inclinado ao incumprimento dos limites impostos pela comunidade ao longo da margem extensiva. Portanto, a margem intensiva se refere a como o comportamento ambiental se aprofunda entre os membros da comunidade que já tem essa característica, enquanto a margem extensiva se refere a como o comportamento ambiental se expande para incluir mais indivíduos. Logo, podemos mapear mudanças dentro do grupo existente de membros da comunidade (margem intensiva) e mudanças que envolvem mais indivíduos adotando um determinado comportamento ambiental (margem extensiva), dependendo da composição dessa população.

Uma implicação central da dinâmica evolucionária *satisficing* para o estudo do comportamento pró-ambiental, apresentada em breve, é que dois membros da comunidade que enfrentam os mesmos benefícios econômicos e custos associados a cada estratégia de extração dos recursos naturais podem escolher estratégias diferentes. Uma pessoa cujo comportamento ambiental líquido tende para a cooperação pode se comportar de maneira não cooperativa se o benefício econômico associado à estratégia de não cooperação for estritamente positivo e suficientemente alto. Por outro lado, uma pessoa cujo comportamento ambiental líquido tende para a não cooperação, por considerar que os limites impostos pela comunidade não são razoáveis, por exemplo, pode se comportar de forma cooperativa se o benefício líquido econômico associado à estratégia de não cooperação for estritamente negativo e suficientemente alto em valor absoluto.

Caso o benefício econômico líquido esperado associado a estratégia de não cooperação for inferior ao valor mínimo considerado satisfatório, então o indivíduo i desconsidera a possibilidade de extrair acima dos limites determinados. Caso contrário, o indivíduo i torna-se um potencial não cooperador. Esse valor mínimo satisfatório do benefício econômico esperado, associado a estratégia de não cooperação, reflete o comportamento ambiental que o indivíduo possui. Esse comportamento ambiental depende, entre diversos fatores, das características idiossincráticas de cada membro dessa comunidade. Assumimos que os valores mínimos satisfatórios são determinados de maneira aleatória e independente entre os indivíduos ao longo do tempo. Supomos ainda que esses valores mínimos satisfatórios são distribuídos aleatoriamente pelos membros da comunidade de acordo com uma função de distribuição cumulativa $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, que é continuamente diferenciável e estritamente crescente.

Portanto, a probabilidade de encontrar aleatoriamente um indivíduo i que considere o benefício econômico líquido esperado referente a estratégia de não cooperação como desencadeador de revisão é dado por $Pr(\pi_{nc} - \pi_c > \rho_i) = F(\pi_{nc} - \pi_c)$. Como resultado, a massa de indivíduos cooperadores que se tornam revisores de estratégia — neste caso com potencial para desistir da cooperação — é dada por $(1 - \lambda_t)F(\pi_{nc} - \pi_c)$. Suponhamos que cada revisor mude realmente para a outra estratégia com relação ao seu nível de extração com probabilidade dada pela fração de indivíduos que adotaram anteriormente a estratégia alternativa a sua. Esse é um efeito de imitação, que pode estar associado a ideia de comportamento convencional em um contexto de tomada de decisão sob incerteza. Considerando essa premissa, o influxo para a população de membros que não cumprem os limites de extração é dado por:

$$(1 - \lambda_t)F(\pi_{nc} - \pi_c)\lambda_t. \tag{19}$$

De maneira análoga, a probabilidade de encontrar aleatoriamente um indivíduo i para o qual o benefício econômico líquido esperado associado a estratégia de não cooperação não desencadeia a tentação de não cooperar pode ser representada por $1 - F(\pi_{nc} - \pi_c)$. A massa de indivíduos não cooperadores que se tornam revisores de estratégia, e potencialmente cooperadores, é dada por $\lambda_t(1 - F(\pi_{nc} - \pi_c))$. Considerando o efeito de imitação descrito anteriormente, segundo o qual os indivíduos potencialmente cumpridores dos limites de extração mudam efetivamente para a estratégia de cooperação com probabilidade dada pela fração de indivíduos que adotaram anteriormente a estratégia considerada, o efluxo da população

de não cooperadores é dado por:

$$\lambda_t[1 - F(\pi_{nc} - \pi_c)](1 - \lambda_t). \quad (20)$$

Combinando os fluxos migratórios especificados em (19) e (20), obtemos a seguinte dinâmica evolutiva satisfatória aumentada por imitação:

$$\dot{\lambda}_t = (1 - \lambda_t)F(\pi_{nc} - \pi_c)\lambda_t - \lambda_t[1 - F(\pi_{nc} - \pi_c)](1 - \lambda_t), \quad (21)$$

cujo estado espacial é o intervalo unitário $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Essa dinâmica pode ser simplificada e reescrita utilizando as expressões para os *payoffs* correspondentes as estratégias alternativas de comportamentos em (13) como segue:

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(1 - \lambda_t) \left[2F \left((x_{nc} - x_c)[A(X) - \delta] - \varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma\pi_{nc} \right) - 1 \right]. \quad (22)$$

Dado que $A(X_t, S_t) = \frac{f(X_t, S_t)}{X_t} = \frac{H(S_t, X_t)}{X_t} = \frac{\theta S_t X_t}{X_t} = \theta S_t$, em que $H(S_t, X_t)$ é definida por [Schaefer \(1957\)](#), podemos representar o produto médio do trabalho. Substituindo os valores de π_{nc} , obtemos a seguinte dinâmica *satisficing*:

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(1 - \lambda_t) \left[2F \left((x_{nc} - x_c)[\theta S_t - \delta] - \varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S_t - \delta] \right) - 1 \right]. \quad (23)$$

Três propriedades dessa dinâmica evolutiva satisfatória aumentada por imitação em (23) merecem destaque. A primeira se refere à monotonicidade da taxa de variação da proporção dos não cooperadores, $\dot{\lambda}$, com relação ao benefício líquido esperado associado a estratégia de não cooperação por unidade de esforço em extração, $(x_{nc} - x_c)[\theta S_t - \delta]$, quando há heterogeneidade na estratégia de cumprimento das normas sociais.

Intuitivamente, qualquer aumento desse benefício esperado leva a um aumento na taxa de variação da proporção de indivíduos que optam pela não cooperação das duas estratégias de comportamento disponíveis, dado que $\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial (x_{nc} - x_c)[\theta S_t - \delta]} = 2\lambda(1 - \lambda)F'(x_{nc} - x_c)[\theta S_t - \delta] - \varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S_t - \delta] > 0$ para todo $\lambda \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$. A segunda propriedade significativa se refere ao impacto inversamente proporcional do montante arrecadado com as multas $\varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S_t - \delta]$, em relação à taxa de variação da proporção dos não cooperadores. Embora haja um efeito indireto positivo das multas para o payoff dos não cooperadores, pois esse montante é um argumento positivo do estoque de recursos naturais, contribuindo para o aumento de S_t , há um efeito negativo direto a proporção de cooperadores, capturado por $\varepsilon(1 - \lambda_t)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S_t - \delta]$.

A terceira propriedade da dinâmica que vale a pena enfatizar diz respeito ao comportamento pró-ambiental da população de membros dessa comunidade, medida pela mediana da distribuição F . Seja m a mediana da distribuição F , de modo que, por definição, $F(m) = 1/2$. Sempre que $0 < m < 1/2$, mais da metade da população dessa comunidade considera a não cooperação, ou seja, a possibilidade de tornar um potencial não cooperador, mesmo que o benefício esperado em termos de benefício líquido da estratégia de não cooperação, dada pelo diferencial de payoffs, $\pi_{nc} - \pi_c = (x_{nc} - x_c)[\theta S - \delta] - \varepsilon(1 - \lambda)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S - \delta]$ seja suficientemente baixo, isto é, desde que $(x_{nc} - x_c)[\theta S - \delta] - \varepsilon(1 - \lambda)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S - \delta] > m$, com $0 < m < 1/2$. Portanto, uma economia cujo comportamento pró-ambiental na população dessa comunidade é descrita por uma distribuição unimodal F com $0 < m < 1/2$ é uma comunidade na qual os indivíduos têm um comportamento pró ambiental inclinado a não cooperação. Isso significa que há uma predominância de indivíduos que se tornam potenciais não cooperadores não só quando o benefício líquido esperado associado a estratégia de não cooperação por unidade de esforço em extração é positivo, mas também quando esse benefício esperado é moderadamente baixo. Por outro lado, quando $1/2 < m < 1$, mais da metade dessa população consideraria a possibilidade de cooperar, isto é, não se tornaria um potencial não

cooperador, mesmo que o benefício líquido esperado da não cooperação, dado pelo diferencial de payoffs, seja estritamente positivo, mas não muito positivo, ou seja, $(x_{nc} - x_c)[\theta S - \delta] - \varepsilon(1 - \lambda)\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}[\theta S - \delta] < m$, com $1/2 < m < 1$.

Mostraremos que a dinâmica evolutiva satisfatória aumentada por imitação em (23) tem dois equilíbrios monomórficos caracterizando a sobrevivência de uma única estratégia de comportamento em cada um, e, diante de certas condições plausíveis (detalhadas na seção seguinte), dois equilíbrios polimórficos caracterizados por duas estratégias de cumprimento da norma social como sobreviventes.

3.1 Análise de (in)estabilidade local

A existência de um comportamento pró-ambiental governando os incentivos e criando pressões morais na gestão estratégica do recurso comum levanta a possibilidade de equilíbrios múltiplos no longo prazo. Por questões algébricas, assumimos que não existe custo de oportunidade de imprimir esforço nas atividades de extração, i.e., $\delta = 0$, e que a $F(\cdot)$ segue uma distribuição uniforme. Com isso, podemos reescrever o sistema dinâmico (18) e (23) como segue:

$$\dot{S}_t = S_t \left[r \left(1 - \frac{S_t}{S_k} \right) - \theta(x_{nc}\lambda_t + x_c(1 - \lambda_t)) + (1 - \lambda_t)\psi \right] \quad (24)$$

$$\dot{\lambda} = \lambda_t(1 - \lambda_t)[2((x_{nc} - x_c)\theta S_t - (1 - \lambda_t)\psi S_t) - 1], \quad (25)$$

sendo $\psi \equiv \varepsilon\sigma(1 - \alpha\tau)x_{nc}\theta \in \mathbb{R}_+$. A transição de estados dessa economia é determinada pelo sistema de equações diferenciais ordinárias com espaço de estados determinado por $\Theta \equiv \{(\lambda, S) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq S \leq S_k\}$. Para valores razoáveis dos parâmetros, o Apêndice A detalha as demonstrações que mostram a existência de três pontos de equilíbrios de longo prazo, λ^* e S^* , que satisfazem $\dot{S}_t = \frac{dS_t}{dt} = \dot{\lambda}_t = \frac{d\lambda_t}{dt} = 0$: dois equilíbrios monomórficos ($\lambda^* = 0$ e $\lambda^* = 1$) e um polimórfico.¹⁰

Avaliadas as condições de existência dos equilíbrios de longo prazo das variáveis de estado, a análise de in(estabilidade) local será realizada por meio de uma expansão de Taylor na vizinhança dos equilíbrios. A isoclina de λ guarda um relacionamento ambíguo com o estoque de recursos naturais, S . Conforme apresentado pelo Apêndice B, a relação é positiva, caracterizada por $\left. \frac{dS_t}{d\lambda_t} \right|_{\dot{\lambda}_t=0} > 0$, sempre que o benefício adicional da não cooperação por unidade de recurso comum, $\theta(x_{nc} - x_c)$, for inferior ao total da multa cobrada por unidade de recurso comum diante da não cooperação, dada por $(1 - \lambda)\psi$. Caso contrário, essa relação é inversa, resultando em $\left. \frac{dS_t}{d\lambda_t} \right|_{\dot{\lambda}_t=0} < 0$. Teremos três casos para avaliar: um com a isóclina de $\dot{\lambda}$ positivo, outro com a isóclina de $\dot{\lambda}$ negativa e mais inclinada que a isóclina de \dot{S} e o último com uma isóclina de $\dot{\lambda}$ negativa, mas menos inclinada que a de \dot{S} .

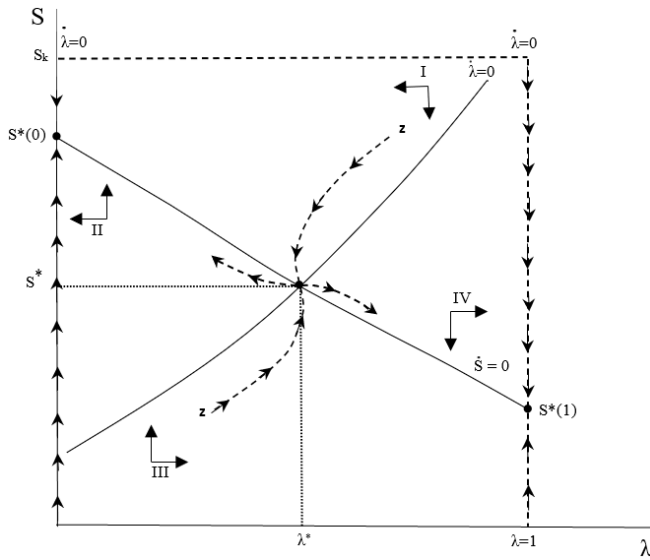
A condição necessária para estabilidade assintótica requer que o determinante da matriz jacobiana, $|J|$ do sistema composto por (24) e (25) seja positivo. Conforme apresentado no Apêndice B, o sinal do determinante, avaliado nos equilíbrios de longo prazo, (S^*, λ^*) , depende de condições paramétricas específicas que resulta em três configurações economicamente plausíveis.¹¹ A seguir, examinamos qualitativamente cada um dos casos e suas implicações para a literatura.

A Figura 1 apresenta uma ilustração qualitativa do ponto de sela em que a isóclina de $\dot{\lambda}$ é positivamente inclinada. Se as condições iniciais forem tais que o sistema socioecológico se encontre em qualquer ponto do ramo estável da sela (a separatriz ZZ), as variáveis de estado convergem assintoticamente para seus valores de equilíbrio de longo prazo. Entretanto, a condição de coexistência das estratégias de cooperação e não

¹⁰ Dada a complexidade das expressões algébricas e para manter o foco na intuição analítica do modelo, optamos por mover as derivações matemáticas correspondentes para os apêndices.

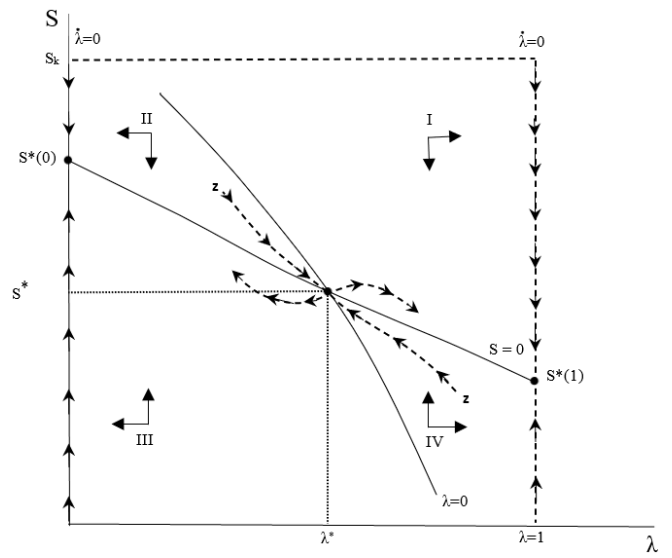
¹¹ Como discutido mais abaixo, a estabilidade assintótica requer que o traço da matriz jacobiana seja negativo.

Figura 1 – Representação do ponto de sela do sistema socioecológico.



Nota: O painel apresenta uma representação ilustrativa do foco instável do sistema.

Figura 2 – Representação do segundo ponto de sela do sistema socioecológico.



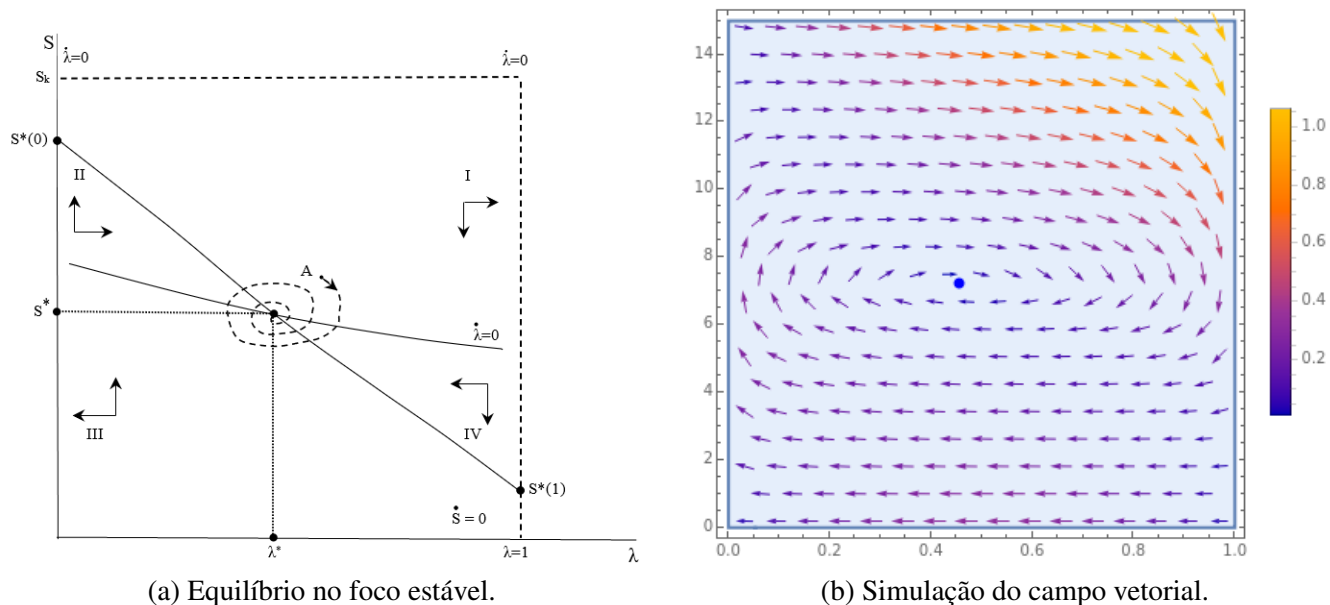
Nota: O painel apresenta uma representação ilustrativa do foco estável do sistema.

cooperação é instável. Qualquer perturbação exógena faz com que o sistema eventualmente convirja para uma situação em que todos não cooperam $\lambda^* = 1$ ou cooperam $\lambda^* = 0$. Consequentemente, o estoque do recurso natural eventualmente alcança seu nível ineficiente, $S^*(1)$, ou eficiente, $S^*(0)$, respectivamente. O determinante, para esse caso, identifica a respectiva trajetória de crescimento como um ponto instável. Por tal razão, nos abstermos de explorar o impacto de mudanças paramétricas no estoque do recurso natural e na composição da população dessa comunidade. Esse tipo de instabilidade também está presente em uma segunda configuração paramétrica específica, a qual está representada em [Figura 2](#) e definida pela isóclina de $\dot{\lambda}$ negativamente inclinada.

Outra regularidade empírica e experimental envolve a coexistência das estratégias de cooperação e não cooperação no longo prazo ([FERRARO; AGRAWAL, 2021](#); [MELO; PIAGGIO, 2015](#)). Nosso modelo ilustra essa possibilidade quando o benefício marginal de extração, *coeteris paribus*, for relativamente grande (Apêndice B). Nesse caso, o determinante da matriz jacobiana do sistema dinâmico composto por (24) e (25), quando avaliado nos valores do equilíbrio polimórfico de longo prazo (S^*, λ^*) , é positivo. Como resultado, a trajetória é assintoticamente estável quando o traço da mesma matriz jacobiana é negativo. Isso requer que a magnitude absoluta da resposta negativa da dinâmica de recursos naturais a uma mudança em S (que apresenta um efeito estabilizador) seja maior do que a magnitude da resposta positiva da dinâmica evolucionária em relação a uma alteração na proporção de cooperadores (o que tem um efeito desestabilizador). A [Figura 3](#) apresenta essa configuração de estabilidade pelo diagrama de fase.

Em $\dot{\lambda}_t = 0$, o impacto de uma pequena mudança em λ_t sobre $\dot{\lambda}_t$ é negativo. Para analisar essa dinâmica, podemos traçar três isóclinas que apresentam $\dot{\lambda}_t = 0$. Duas verticais, uma para $\lambda^* = 0$ e outra para $\lambda^* = 1$ e uma última, negativamente inclinada no plano (λ_t, S_t) , para $\lambda_t = \lambda^*$. No equilíbrio polimórfico, quando $\lambda_t = \lambda^*$, temos que os *payoffs* de não cooperar e cooperar são equivalentes, $\pi_{nc} - \pi_c = 0$, fazendo com que $\dot{\lambda}_t = 0$. Logo, sempre que λ_t inicia à esquerda de $\dot{\lambda}_t = 0$, temos que $\pi_{nc} - \pi_c < 0$, causando uma tendência de redução da não cooperação, tendo em vista o diferencial de *payoffs*, fazendo com que $\dot{\lambda}_t < 0$. Esse comportamento é representado pelas setas apontando para a esquerda nas regiões III e IV da [Figura 3](#). Analogamente, quando a trajetória de λ_t inicia à direita de $\dot{\lambda}_t = 0$, $\pi_{nc} - \pi_c > 0$ e $\dot{\lambda}_t > 0$, indicando uma tendência de aumento na parcela de não cooperadores na comunidade. Essa relação é representada pelas setas apontando para a direita nas regiões I e II na [Figura 3](#).

Figura 3 – Representação do foco estável do sistema socioecológico



Nota: O painel (a) apresenta uma representação ilustrativa do foco estável do sistema. O painel (b) apresenta uma simulação do campo vetorial que governa o relacionamento cíclico entre a fração de não cooperadores (eixo x) e o estoque do recurso natural (eixo y). Os parâmetros economicamente plausíveis utilizados na simulação foram os seguintes: $x_c = 0.1$, $x_{nc} = 1.5$, $\alpha = 0.07$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0.4$, $\tau = 0.05$, $\sigma = 0.05$, $r = 0.07$, $\theta = 0.05$, $K = 15$.

O equilíbrio $(\lambda^*, S^*(\lambda^*))$ é um foco estável, conforme demonstrado no Apêndice B, enquanto os equilíbrios $(0, S^*(0))$ e $(1, S^*(1))$ são repulsores locais. O equilíbrio polimórfico é caracterizado por trajetórias horárias que fluem em direção a ele. Ele é decorrente do posicionamento das curvas que, cada uma, por vez, bloqueia a linha de fluxo que corre na direção prescrita, fazendo com que a linha de fluxo seja obrigada a cruzar de uma região para a outra em um formato espiral, conforme indicado pela linha pontilhada na Figura 3.

4 Conclusão

Entre as várias maneiras de implementar a gestão dos recursos comuns, o framework institucional desempenha um papel fundamental. Este estudo buscou modelar a influência do comportamento pró-ambiental em um jogo evolucionário de CPR. A estrutura desenvolvida avança em relação à literatura convencional de jogos de CPR em pelo menos duas dimensões analíticas relevantes. Primeiro, considera o papel de elementos morais envolvidos no cumprimento de uma norma social, amplamente documentados pela literatura experimental, para a emergência de um comportamento pró-ambiental e para a autogovernança eficiente. E segundo, ao construir uma estrutura analítica baseada na teoria dos jogos evolucionários, modela um ambiente institucional relativamente mais próximo à dinâmica real dos sistemas socioecológicos, caracterizados por indivíduos que possuem racionalidade limitada.

Para valores razoáveis dos parâmetros, mostramos que a relação entre o estoque do recurso natural e a massa de indivíduos apresenta três configurações possíveis no longo prazo. Como as evidências são amplas e diversas, todas as configurações de longo prazo do modelo subsidiam, *mutatis mutandis*, padrões comportamentais analisados em pesquisas de campo. Particularmente, regularidades empíricas discutidas por Elinor Ostrom, como a coexistência entre cooperadores e não cooperadores nas comunidades de common pool e a existência de um limiar para a apropriação dos retornos crescentes da cooperação, representam resultados centrais da pesquisa.

Em cada uma dessas configurações de longo prazo, avaliamos como o sistema socioecológico

consegue sustentar o equilíbrio cooperativo de longo prazo em que o estoque do recurso natural esteja próximo do seu nível socialmente eficiente. Ressaltamos que os padrões teóricos previstos pelo modelo estão em linha com as evidências empíricas e experimentais da literatura de recursos comuns. Nesse contexto, ao destacar o papel dos elementos morais e individuais de conformidade com normas sociais, a estrutura analítica baseada na teoria de jogos evolucionários modelada nesta pesquisa abre uma importante agenda para pesquisas futuras. Um caminho promissor envolve a modelagem de elementos comportamentais mais amplos a partir de dinâmicas de longo prazo mais ricas, como a dinâmica evolucionário do tipo *satisficing*, que permite a modelagem de aspectos comportamentais menos tangíveis sem a necessidade de formas funcionais mais restritivas. A inclusão de rotinas educacionais também pode ser explorada como um mecanismo para disseminar informações e colaborar para a aderência de normas sociais nos membros menos engajados.

Referências

- ACHESON, J. M. The Lobster Gangs of Maine. [S.l.]: University Press of New England, 1988.
- ANDERSON, T. L.; LEAL, D. R. Free Market Environmentalism. [S.l.]: Avalon Publishing, 1991.
- BICCHIERI, C. et al. Social norms and behavior change: The interdisciplinary research frontier. Journal of Economic Behavior Organization, v. 205, p. A4–A7, 2023.
- BLUFFSTONE, R. et al. Cooperative behavior and common pool resources: Experimental evidence from community forest user groups in nepal. World Development, v. 129, p. 104889, 2020.
- BRANDER, J. A.; TAYLOR, M. S. The simple economics of easter island: A ricardo-malthus model of renewable resource use. The American Economic Review, v. 88, n. 1, p. 119–138, 1998.
- BUNTAINE, M. T.; ZHANG, B.; HUNNICUTT, P. Citizen monitoring of waterways decreases pollution in china by supporting government action and oversight. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 118, n. 29, p. e2015175118, 2021.
- CARPIO, M. B. D.; ALPIZAR, F.; FERRARO, P. J. Community-based monitoring to facilitate water management by local institutions in costa rica. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 118, n. 29, p. e2015177118, 2021.
- COX, J. C. et al. Trust in private and common property experiments. Southern Economic Journal, Southern Economic Association, v. 75, n. 4, p. 957–975, 2009.
- CRAWFORD, S. E. S.; OSTROM, E. A grammar of institutions. The American Political Science Review, [American Political Science Association, Cambridge University Press], v. 89, n. 3, p. 582–600, 1995.
- da Silveira, J. J.; LIMA, G. T. Wage inequality as a source of endogenous macroeconomic fluctuations. Structural Change and Economic Dynamics, v. 56, p. 35–52, 2021.
- DASGUPTA, P. S.; HEAL, G. M. Economic Theory and Exhaustible Resources. [S.l.]: Cambridge University Press, 1980. (Cambridge Economic Handbooks).
- DIETZ, T.; OSTROM, E.; STERN, P. C. The struggle to govern the commons. Science, v. 302, n. 5652, p. 1907–1912, 2003.
- EISENBARTH, S.; GRAHAM, L.; RIGTERINK, A. S. Can community monitoring save the commons? evidence on forest use and displacement. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 118, n. 29, p. e2015172118, 2021.

- FALK, A.; FEHR, E.; FISCHBACHER, U. Appropriating the commons - a theoretical explanation. Public Choice & Political Economy eJournal, 2001.
- FARROW, K.; GROLLEAU, G.; IBANEZ, L. Social norms and pro-environmental behavior: A review of the evidence. Ecological Economics, v. 140, p. 1–13, 2017.
- FERRARO, P. J.; AGRAWAL, A. Synthesizing evidence in sustainability science through harmonized experiments: Community monitoring in common pool resources. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 118, 2021.
- HARDIN, G. The tragedy of the commons. Science, v. 162, n. 3859, p. 1243–1248, 1968.
- LAURENT, E.; OSTROM, E. Des individus rationnels sont-ils désespérément piégés dans des dilemmes sociaux ? L'analyse d'Elinor Ostrom. Annales des mines - Série Responsabilité et environnement, F.F.E., v. 3, n. 79, p. 31 – 35, 2015.
- MARTINS, E. M. J. H.; SILVEIRA, J. J. da; LIMA, G. T. Heterogeneity in the extraction of labor from labor power and persistence of wage inequality. Metroeconomica, v. 72, n. 2, p. 260–285, 2021.
- MELO, G. de; PIAGGIO, M. The perils of peer punishment: Evidence from a common pool resource framed field experiment. Ecological Economics, v. 120, p. 376–393, 2015.
- MIAO, L.; WEI, W. Consumers' pro-environmental behavior and the underlying motivations: A comparison between household and hotel settings. International Journal of Hospitality Management, v. 32, p. 102–112, 2013.
- MOSLER, H.-J. Self-dissemination of environmentally-responsible behavior: The influence of trust in a commons dilemma game. Journal of Environmental Psychology, v. 13, n. 2, p. 111–123, 1993.
- OSTROM, E. Governing the commons-The evolution of institutions for collective actions. [S.l.]: Political economy of institutions and decisions, 1990.
- OSTROM, E. Collective action and the evolution of social norms. Journal of Economic Perspectives, v. 14, n. 3, p. 137–158, September 2000.
- OSTROM, E.; GARDNER, R.; WALKER, J. Rules, Games, and Common-Pool Resources. [S.l.]: University of Michigan Press, 1994.
- OSTROM, E.; WALKER, J.; GARDNER, R. Covenants with and without a sword: Self-governance is possible. The American Political Science Review, [American Political Science Association, Cambridge University Press], v. 86, n. 2, p. 404–417, 1992.
- POTEETE, A. R.; OSTROM, E.; JANSSEN, M. A. Working Together: Collective Action, the Commons, and Multiple Methods in Practice. [S.l.]: Princeton University Press, 2010.
- ROSE, C. The comedy of the commons: Custom, commerce, and inherently public property. The University of Chicago Law Review, University of Chicago Law Review, v. 53, n. 3, p. 711–781, 1986.
- RUSTAGI, D.; ENGEL, S.; KOSFELD, M. Conditional cooperation and costly monitoring explain success in forest commons management. Science, v. 330, n. 6006, p. 961–965, 2010.
- SCHAEFER, M. B. Some considerations of population dynamics and economics in relation to the management of the commercial marine fisheries. Journal of the Fisheries Research Board of Canada, v. 14, n. 5, p. 669–681, 1957.

- SEN, A. On Ethics and Economics. Oxford and New York: Oxford University Press, 1987.
- SETHI, R.; SOMANATHAN, E. The evolution of social norms in common property resource use. The American Economic Review, American Economic Association, v. 86, n. 4, p. 766–788, 1996.
- SILVEIRA, J. J. da; LIMA, G. T. Heterogeneity in inflation expectations and macroeconomic dynamics under evolutionarily satisficing learning. Macroeconomic Dynamics, v. 26, n. 2, p. 361–393, 2022.
- SIMON, H. A. A behavioral model of rational choice. The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press, v. 69, n. 1, p. 99–118, 1955.
- SIMON, H. A. Models of Bounded Rationality: Empirically Grounded Economic Reason. [S.l.]: The MIT Press, 1997.
- SOTO, H. D. The Mystery of Capital: Why Capitalism Triumphs in the West and Fails Everywhere Else. [S.l.]: Basic Books, 2000. (Basic books).
- TORRES, L. B. Evolutionary persistence of corruption and some effects on economic growth. 95 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020.
- TULLOCK, G. The Logic of the Law. [S.l.]: Univ Publ Assn, 1971.
- VÁZQUEZ, A. Ética. [S.l.]: Civilização Brasileira, 2007.
- VEGA-REDONDO, F. Evolution, Games, and Economic Behaviour. [S.l.]: Oxford University Press UK, 1996.
- VOLLAN, B.; OSTROM, E. Cooperation and the commons. Science, v. 330, n. 6006, p. 923–924, 2010.
- WILLY, D. K.; HOLM-MÜLLER, K. Social influence and collective action effects on farm level soil conservation effort in rural kenya. Ecological Economics, v. 90, p. 94–103, 2013.
- YAMI, M.; VOGL, C.; HAUSERA, M. Comparing the effectiveness of informal and formal institutions in sustainable common pool resources management in sub-saharan africa. Conservation and Society, v. 7, n. 3, p. 153–164, 2009.
- YOUNG, O. Natural Resources and the State: The Political Economy of Resource Management. [S.l.]: University of California Press, 2022. (Studies in international political economy).

Apêndice A.

Para computar os equilíbrios que ocorrem quando $\dot{S}_t = \frac{dS_t}{dt} = \dot{\lambda}_t = \frac{d\lambda_t}{dt} = 0$ precisamos analisar quais valores de S e λ atendem a essa condição em (24) e (25). É nítido que $\lambda^* = 0$ e $\lambda^* = 1$ satisfazem a condição de $\dot{\lambda}_t = 0$ em (25), sendo eles equilíbrios do sistema. Quando a escolha de ser cooperador ou não cooperador produz o mesmo *payoff* esperado, ou seja, quando $\pi_c - \pi_{nc} = 0$, o sistema alcança um ponto de equilíbrio interno. Nele, ainda existem indivíduos dispostos a mudar suas estratégias, mas o fluxo de saída de ambas as subpopulações será igual. Ou seja, a partir de (25), temos que $\dot{\lambda} = 0$, quando:

$$(x_{nc} - x_c)\theta S_t - (1 - \lambda_t)\psi S_t = \frac{1}{2} \quad (\text{A.1})$$

Quando a diferença entre os payoffs for igual a zero, a solução λ^* para (A.1) é o equilíbrio interno, dado pela seguinte expressão:

$$\lambda^*(S^*) = \frac{1 + 2S^*(\psi - \theta(x_{nc} - x_c))}{2\psi S^*}. \quad (\text{A.2})$$

Note que existe um $\lambda^* \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$, desde que $1 + 2S^*(\psi - \theta(x_{nc} - x_c))$ seja maior que 0 e menor que $2\psi S^*$. Essa e as demais condições para a existência de λ^* estão resumidas na [Tabela 1](#). Para qualquer

Tabela 1 – Condições para a existência de λ^*

$1 + 2S^*(\psi - \theta(x_{nc} - x_c)) = 0$	$\lambda^* = 0$
$0 < 1 + 2S^*(\psi - \theta(x_{nc} - x_c)) < 2\psi S^*$	$\lambda^* \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$
$1 + 2S^*(\psi - \theta(x_{nc} - x_c)) = 2\psi S^*$	$\lambda^* = 1$
$1 + 2S^*(\psi - \theta(x_{nc} - x_c)) > 2\psi S^*$	$\nexists \lambda^* \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$

Fonte: os autores

$0 < S < S_k$, e, com um esforço agregado suficiente, a extração pode aumentar para igualar a capacidade de regeneração do recurso natural, fazendo com que $\dot{S}_t = 0$. No equilíbrio polimórfico, quando uma parcela da comunidade escolhe não cooperar e outra cooperar, o estoque do recurso natural de equilíbrio pode ser representado como:

$$S^*(\lambda^*) = \frac{S_k}{r} [r - \theta(x_{nc}\lambda^* + x_c(1 - \lambda^*)) + (1 - \lambda^*)\psi]. \quad (\text{A.3})$$

Suponha uma situação em que todos os membros da comunidade escolhem a estratégia de não cooperação, i.e., $\lambda^* = 1$. Dessa forma, a partir de (A.3) o estoque do recurso natural no equilíbrio de longo prazo é representado por:

$$S^*(1) = \frac{S_k(r - \theta x_{nc})}{r}. \quad (\text{A.4})$$

Note que em uma comunidade na qual todos os membros têm um comportamento pró-ambiental mínimo, i.e, $\lambda^* = 1$, e, em conjunto, a taxa de renovação intrínseca, r , é inferior à produtividade de extração dos indivíduos não cooperadores, θx_{nc} , surge a possibilidade de exaustão dos recursos naturais, como previsto em [Brander e Taylor \(1998\)](#).

Há ainda o caso em que todos os membros da comunidade apresentam o grau máximo do comportamento pró-ambiental, i.e., $\lambda^* = 0$, escolhendo a estratégia de cooperação, na qual o estoque do recurso natural de equilíbrio é proporcionalmente mais alto do que o valor de equilíbrio do caso anterior, tendo em vista a diferença no nível de esforço de extração dos não cooperadores e cooperadores, $x_{nc} - x_c > 0$. Portanto, o estoque do recurso natural no equilíbrio de longo prazo no caso em que há apenas cooperadores na comunidade pode ser descrito como:

$$S^*(0) = \frac{S_k(r + \psi - \theta x_c)}{r}. \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B.

As propriedades de (in)estabilidade do sistema dinâmico descrito por (24) e (25) na vizinhança do equilíbrio polimórfico λ^*, S^* são determinadas pela seguinte matriz Jacobiana:

$$\mathbf{J}(\lambda^*, \mathbf{S}^*) = \begin{bmatrix} 2\lambda^*(1 - \lambda^*)[S^*\psi] & -2\lambda^*(1 - \lambda^*)[(x_{nc} - x_c)\theta - (1 - \lambda^*)\psi] \\ -S^*[(x_{nc} - x_c) + \psi] & -r\frac{S^*}{S_k} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

sendo:

$$\begin{aligned} J_{11} &\equiv 2\lambda^*(1 - \lambda^*)[S^*\psi] > 0, \\ J_{12} &\equiv 2\lambda^*(1 - \lambda^*)[(x_{nc} - x_c)\theta - (1 - \lambda^*)\psi] \leq 0, \end{aligned}$$

$$J_{21} \equiv -S^*[(x_{nc} - x_c) + \psi] < 0,$$

$$J_{22} \equiv -r \frac{S^*}{S_k} < 0.$$

O determinante da matriz Jacobiana pode ser representado como segue:

$$\det \mathbf{J}(\lambda^*, \mathbf{S}^*) = 2\lambda^*(1 - \lambda^*)S^* [a - b], \quad (\text{B.2})$$

sendo $a = \theta(x_{nc} - x_c)((x_{nc} - x_c) + \psi) > 0$ e $b = \psi((1 - \lambda^*)((x_{nc} - x_c) + \psi) + r \frac{S^*}{S_k}) > 0$.

O traço da matriz Jacobiana é dado por $J_{11} + J_{22}$, ou seja:

$$\text{tr} \mathbf{J}(\lambda^*, \mathbf{S}^*) = S^* \left[2\lambda^*(1 - \lambda^*)\psi - \frac{r}{S_k} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Sejam as isóclinas $\dot{\lambda}_t = 0$ e $\dot{S}_t = 0$ definidas, respectivamente, por:

$$2[\theta(x_{nc} - x_c)S_t - \psi(1 - \lambda_t)S_t] - 1 = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$S[r - \frac{r}{S_k}S_t - \theta(x_c\lambda_t + x_{nc}(1 - \lambda_t)) + (1 - \lambda_t)\psi] = 0. \quad (\text{B.5})$$

As inclinações das isóclinas apresentadas em (B.4) e (B.5) podem ser descritas, respectivamente, como:

$$\left. \frac{dS_t}{d\lambda_t} \right|_{\dot{\lambda}_t=0} = -\frac{\psi S}{\theta(x_{nc} - x_c) - (1 - \lambda)\psi} \leq 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\left. \frac{dS_t}{d\lambda_t} \right|_{\dot{S}_t=0} = -\frac{S_k[(x_{nc} - x_c) + \psi]}{r} < 0, \quad (\text{B.7})$$

sendo $\theta \in (0, 1) \in \mathbb{R}_+$, $S_k \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\psi \in \mathbb{R}_+$ e $(x_{nc} - x_c) \in \mathbb{R}_+$. Suponha que $\left. \frac{dS_t}{d\lambda_t} \right|_{\dot{\lambda}_t=0} > 0$, de forma que $\theta(x_{nc} - x_c) < (1 - \lambda)\psi$. Consequentemente, temos que $J_{12} < 0$ e $\det \mathbf{J} < 0$, caracterizando o equilíbrio polimórfico do sistema como um ponto de sela.

Assumindo que $\theta(x_{nc} - x_c) > (1 - \lambda)\psi$, temos $\left. \frac{dS_t}{d\lambda_t} \right|_{\dot{\lambda}_t=0} < 0$, o que contempla a possibilidade de dois casos possíveis, a depender da inclinação de $\dot{\lambda} = 0$. Para avaliar as condições de estabilidade de tais casos, podemos subtrair (B.6) de (B.7) e manipular algebricamente, chegando ao que se segue:

$$\frac{b - a}{[\theta(x_{nc} - x_c) - (1 - \lambda)\psi]r}. \quad (\text{B.8})$$

Supondo que a inclinação da isóclina $\dot{S}_t = 0$ seja maior do que a de $\dot{\lambda} = 0$, temos que $b > a$ e, consequentemente, $\det \mathbf{J} < 0$, caracterizando o equilíbrio polimórfico do sistema como um ponto de sela. Caso contrário, ou seja, quando a inclinação da isóclina de $\dot{\lambda} = 0$ é maior do que a de $\dot{S}_t = 0$, temos $a > b$ e consequentemente, $\det \mathbf{J} > 0$. A análise formal estabelece que um equilíbrio estável é obtido a partir de um traço negativo, ou seja, $\frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t} + \frac{\partial \dot{S}_t}{\partial S_t} < 0$. $\frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t}$ é positivo, de forma que impactos marginais na fração de cooperadores sobre a dinâmica do replicador aumenta a proporção de indivíduos cooperando na comunidade, contribuindo para a instabilidade. Já $\frac{\partial \dot{S}_t}{\partial S_t}$ é negativo e contribui para a estabilidade do sistema. Como temos, por suposição, que $\frac{\partial \dot{S}_t}{\partial S_t} > \frac{\partial \dot{\lambda}_t}{\partial \lambda_t}$, ocorre uma convergência cíclica para o equilíbrio.